1 (b) položíme $f(x) = \arctan(40 - \log_{10}(x^{10}+1)) - \frac{\pi}{4} e^{\sin(30x) + x^{54321}}$, $x \in [-7, 2]$.

Zjevně $f \in C([-7,2])$ (skládání a aritmetika spojitých funkcí)

Potom $f(-2) = \arctan(40 - \log_{10}(2^{10}+1)) - \frac{\pi}{4} e^{\sin(-60) - 2^{54321}}$

$$\geq \arctan(40-4) - \frac{\pi}{4} e^{0} > \arctan(1) - \frac{\pi}{4} = 0$$

$$f(2) = \arctan(40 - \log_{10}(2^{10}+1)) - \frac{\pi}{4} e^{\sin(60) + 2^{54321}}$$

$$< \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} e^{1} < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

Tedy podle Darbouxovy věty musí existovat $x \in (-7, 2)$, že $f(x) = 0$.

(3) Taková funkce existovat nemůže.

Podle Darbouxovy věty musí existovat $x_n \in \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right)$, $f(x_n) = \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ (dva strážníci).

Rovněž $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \frac{1}{2}$.

(2) (d)

(i) platí $g'(0) = 2f(0)\,f'(0) = 0 \quad (f'(0)=0)$

(ii) neplatí podle vzorečku z (i) stačí $f(0)=0$,
tedy např. $f(x) = x$ je protipříklad

(iii) platí $g(-x) = (f(-x))^2 = (-f(x))^2 = (f(x))^2 = g(x)$

f lichá

(iv) platí

$$f'(-a) = \lim_{x \to -a} \frac{f(x) - f(-a)}{x-(-a)} = \lim_{x \to -a} \frac{-f(-x) + f(a)}{a-(-x)}$$

VOLSF

$$= \lim_{t \to a} \frac{-f(t) + f(a)}{a - t} = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t-a} = f'(a).$$

(v) neplatí

např. pro $f(x) = x+1$ je $f'(x) = 1$

(3) (a)

(i) platí: $h^{(7)}(1)$ existuje (a tedy i $h^{(k)}(1)$, $k=1,\dots,6$)

a Taylorův polynom lze definovat

(ii) neplatí:
$$h^{(7)}(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{7}{k} f^{(k)}(1)\, g^{(7-k)}(1)$$
$$= 2\cdot(-1) + \binom{7}{2}(-1)^2 + \binom{7}{3}(-3) < 0$$

(iii) neplatí: $h'(1) = h''(1) = 0$, $h'''(1) = -2$

a stačí použít větu o jemnějších podmínkách pro extrémy

(iv) platí: podle Peanova tvaru zbytku:
$$0 = \lim_{x\to 1} \frac{h(x) - T_{1,h}^{2}(x)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{h(x)}{(x-1)^2}$$

Tedy existuje $\delta > 0$, že $\frac{|h(x)|}{(x-1)^2} < 1$, $|x-1| < \delta$

Závorem ze spojitosti f a g platí, že funkce $\frac{|h(x)|}{(x-1)^2}$

a tedy omezená na $[0,2] \setminus (1-\delta, 1+\delta)$.

Tudíž existuje $D \in \mathbb{R}$, že $\frac{|h(x)|}{(x-1)^2} \leq D$ $\quad x \in [0,2] \setminus (1-\delta, 1+\delta)$.

Celkem
$$|h(x)| \leq \underbrace{\max(1, D)}_{= C} (x-1)^2 \quad x \in [0,2]$$